Έλεγχος υποθέσεων I
z-test & *t*-test

Ε. Κατσανίδης

Μοντέλα στην Επιστήμη Τροφίμων 532Ε

Τομέας Επιστήμης & Τεχνολογίας Τροφίμων

Έλεγχος υποθέσεων

- Συνεχή δεδομένα
  - *z-test*
  - *Student's test (t*-test)
  - Ανάλυση παραλλακτικότητας ή ανάλυση διασποράς (ANOVA)

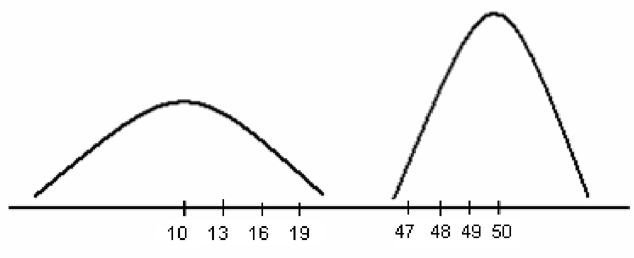
Γενικά για τον έλεγχο υποθέσεων

- Για μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων (n>30) χρησιμοποιούμε το *z-test* για να ελέγξουμε αν:
  - ο μέσος όρος ενός δείγματος είναι ίσος με μια ορισμένη τιμή
  - οι μέσοι όροι δυο δειγμάτων είναι ίσοι
- Για μικρό αριθμό παρατηρήσεων (n<30) χρησιμοποιούμε το *t*-test για να ελέγξουμε αν:
  - ο μέσος όρος ενός δείγματος είναι ίσος με μια

Καμπύλες πυκνότητας

- καμπύλη πυκνότητας για πληθυσμούς με κανονική κατανομή

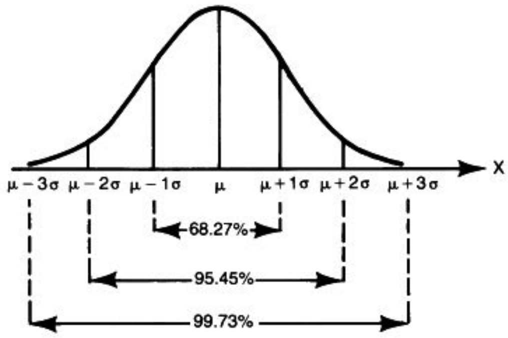
μ=10 & s=3 μ=50 & s=1



- Θεωρούμε ότι το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη ισούται με τη μονάδα (1).

Η τυπική κατανομή

- Εκφράζει τη σχέση σ και κατανομής τιμών. Δηλ. πόσες τιμές (%) περιέχονται ανάμεσα σε 2 τιμές στον άξονα x



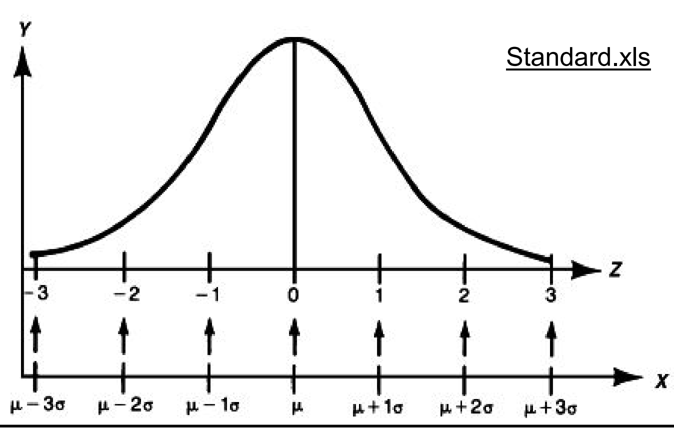
Ε. Κατσανίδης

Η κατανομή *z*

Εφαρμόζοντας τη μετατροπή **z=(x-μ)/σ** δεν χρειάζεται να κατασκευάζουμε καμπύλες για κάθε συνδυασμό μέσου όρου και τυπικής απόκλισης επειδή κάθε τιμή x δίνεται από τον τύπο:

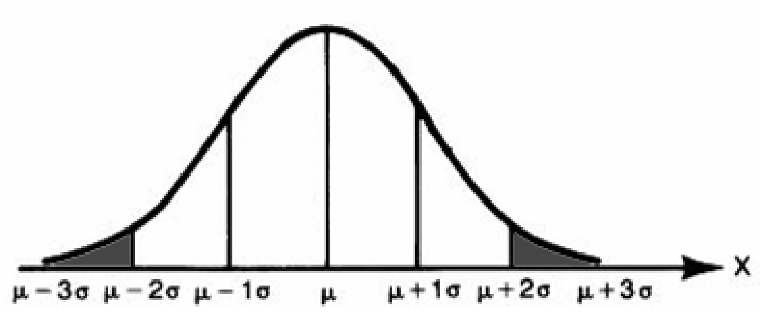
x = μ ± zσ.

Standard.xls



Ε. Κατσανίδης

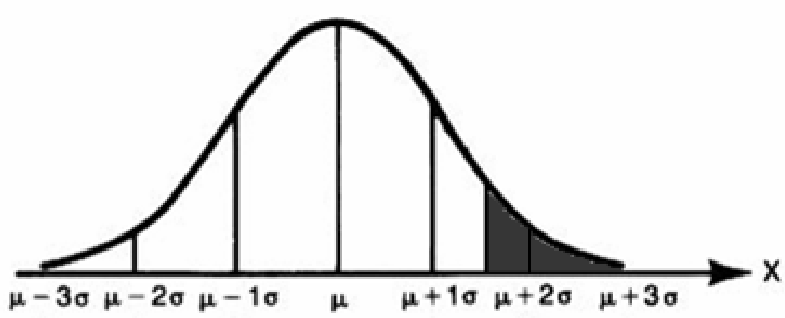
Το 5% των τιμών βρίσκεται μακρύτερα από ± 2σ (αμφίπλευρα)



0,025 ή 2,5% των τιμών του πληθυσμού

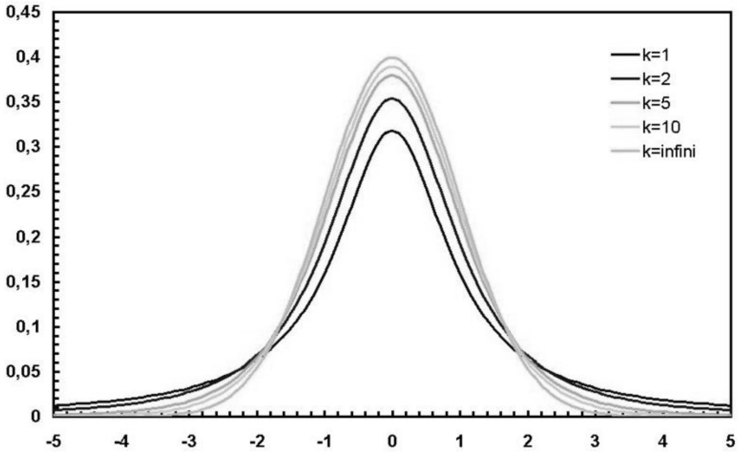
0,025 ή 2,5% των τιμών του πληθυσμού

Το 5% των τιμών <u>δεν</u> βρίσκεται μακρύτερα από + 2σ (μονόπλευρα)



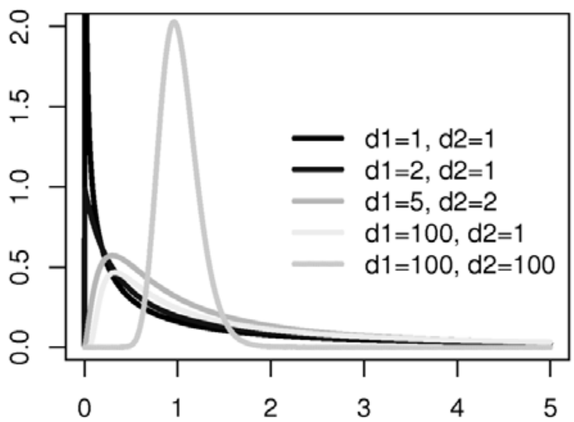
0,05 ή 5% των τιμών του πληθυσμού

Κατανομή *t*



Ε. Κατσανίδης

Κατανομή *f*



Ε. Κατσανίδης

Η μηδενική υπόθεση (H_o) και η εναλλακτική υπόθεση (H_α)

$H_o : \overline{\chi} = \mu$

Η μηδενική υπόθεση

$\overline{\chi} - \mu = 0$

$H_\alpha : \overline{\chi} \neq \mu$

$H_\alpha : \overline{\chi} > \mu$

$H_\alpha : \overline{\chi} < \mu$

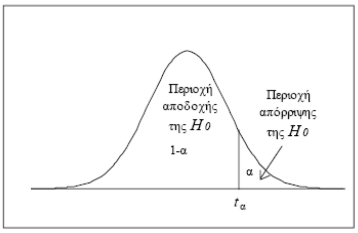
Η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να έχει διάφορες μορφές:

$\overline{\chi} - \mu \neq 0$ (αμφίπλευρη)

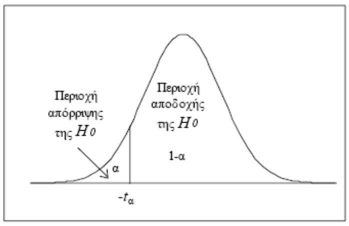
$\overline{\chi} - \mu > 0$ (μονόπλευρη)

$\overline{\chi} - \mu < 0$ (μονόπλευρη)

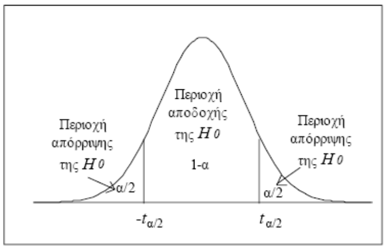
Ε. Κατσανίδης



Εναλλακτική $\mu > \mu_0$ (μονόπλευρο test)
$P(T > t_\alpha) = \alpha$
$R: \{t > t_\alpha\}$



Εναλλακτική $\mu < \mu_0$ (μονόπλευρο test)
$P(T < -t_\alpha) = \alpha$
$R: \{t < -t_\alpha\}$



Εναλλακτική $\mu \neq \mu_0$ (δίπλευρο test)
$P(|T| > t_{\alpha/2}) = \alpha$
$R: \{|t| > t_{\alpha/2}\}$

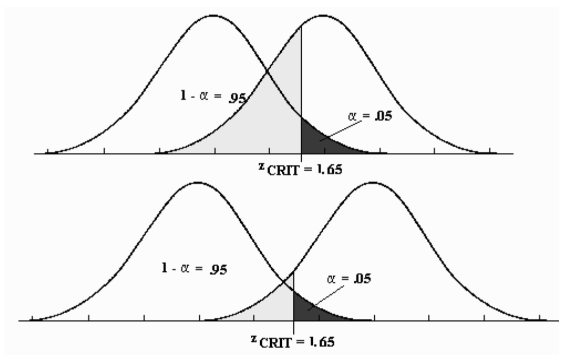
Ε. Κατσανίδης

Αποφάσεις κατά τον έλεγχο υποθέσεων

	Απόφαση	
Πραγματικότητα	Αποδοχή H_o Απόρριψη $H_α$	Απόρριψη H_o Αποδοχή $H_α$
H_o ορθή $H_α$ εσφαλμένη	Ορθή απόφαση P=1-α	Λάθος απόφαση P=α Σφάλμα Τύπου I
H_o εσφαλμένη $H_α$ ορθή	Λάθος απόφαση P=β Σφάλμα Τύπου II	Ορθή απόφαση P=1-β

Σφάλμα Τύπου I και II

Σφάλμα τύπου I (α, πιθανότητα να απορρίψουμε την H_o ενώ είναι σωστή)
Σφάλμα τύπου II (β, πιθανότητα να δεχθούμε την H_o ενώ είναι λάθος)



Έλεγχος υπόθεσης ότι ο μέσος όρος έχει μια ορισμένη τιμή (μ_o)

Μηδενική υπόθεση: H_o: $\mu = \mu_o$

Εναλλακτική υπόθεση

Μονόπλευρη δοκιμή	Δίπλευρη δοκιμή
H_1: $\mu > \mu_o$	H_1: $\mu \neq \mu_o$
H_1: $\mu < \mu_o$	

<u>Μεγάλο δείγμα (n</u>>30) $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\sigma / \sqrt{n}}$ ή $z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{s / \sqrt{n}}$

Προϋπόθεση: ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχεται το δείγμα πρέπει να είναι κανονικά κατανεμημένος

Έλεγχος υπόθεσης ότι ο μέσος όρος έχει μια ορισμένη τιμή (μ_o)

Μηδενική υπόθεση: H_o: $\mu = \mu_o$

Εναλλακτική υπόθεση

Μονόπλευρη δοκιμή	Δίπλευρη δοκιμή
H_1: $\mu > \mu_o$	H_1: $\mu \neq \mu_o$
H_1: $\mu < \mu_o$	

<u>Μικρό δείγμα (n<30)</u>

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_o}{s / \sqrt{n}}$$

Προϋπόθεση: ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχεται το δείγμα πρέπει να είναι κανονικά κατανεμημένος

Student's test (*t*-test)

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_o}{s / \sqrt{n}}$$

$\overline{\chi}$ = μέσος όρος δείγματος
μ_o = τιμή στόχος ή ελέγχου
s = τυπική απόκλιση
n = αριθμός παρατηρήσεων

$$s = \sqrt{s^2}$$

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{(n-1)}$$

$s / \sqrt{n}$ = τυπικό σφάλμα

Εφαρμογές στο MS Excel

Από το μενού εντολών επιλέγουμε `Εργαλεία (Tools)` και μετά `Ανάλυση δεδομένων (Data Analysis)`.

Αν δεν είναι εγκατεστημένο (δεν φαίνεται σαν διαθέσιμη επιλογή), επιλέγουμε `Εργαλεία (Tools)`, μετά `Πρόσθετα (Add-ins)` και επιλέγουμε το `Ανάλυση δεδομένων`

Έλεγχος υπόθεσης ότι ο μέσος όρος έχει μια ορισμένη τιμή

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{s / \sqrt{n}}$$

H_o: $\overline{\chi}$ =10 H_1: $\overline{\chi} \neq 10$

10,1	**10,2**	**9,9**
10,3	**10,1**	**10,2**
9,8	**9,9**	**10,3**
10,1	**10,3**	**10,2**
9,6	**10,2**	**10,3**

$\overline{\chi}$ = 10,1
μ_o = 10
s = 0,21
n = 15

Αποδεχόμαστε την H_o ?

Παράδειγμα στο Excel (t_test1.xls)

Σύγκριση μέσων όρων δύο δειγμάτων

- Δύο ανεξάρτητα δείγματα με ίδια παραλλακτικότητα $(s_1^2 = s_2^2)$
- Δύο ανεξάρτητα δείγματα με διαφορετική παραλλακτικότητα $(s_1^2 \neq s_2^2)$
- Δύο εξαρτημένα δείγματα με τιμές κατά ζεύγη (s_D^2)

Έλεγχος υπόθεσης για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών (z)

μεγάλα δείγματα ($n_1, n_2 \geq 30$), σ_1^2, σ_2^2 γνωστές ή άγνωστες

Τιμή του στατιστικού: $z = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ ή $z = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$

Περιοχές Απόρριψης της H_0

Μονόπλευρο test	Δίπλευρο test
$z>z_\alpha$ (H_1: μ_1-μ_2 $>\delta$) $z<-z_\alpha$ (H_1: μ_1-μ_2 $<\delta$)	$\lvert z\rvert>z_{\alpha/2}$

Έλεγχος υπόθεσης για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών

Ανεξάρτητα δείγματα

Μηδενική υπόθεση H_0 : μ_1-μ_2 = δ

(ορίζοντας δ=0, εξετάζουμε εάν $\mu_1=\mu_2$)

Εναλλακτική υπόθεση:

Μονόπλευρο test

H_1: $\mu_1 - \mu_2 > \delta$ ή H_1: $\mu_1 - \mu_2 < \delta$

Δίπλευρο test

H_1: $\mu_1 - \mu_2 \neq \delta$

Προϋπόθεση: ο πληθυσμός από τον οποίο προέρχεται το δείγμα πρέπει να είναι κανονικά κατανεμημένος

Δύο ανεξάρτητα δείγματα με ίδια παραλλακτικότητα

Μικρά δείγματα

Θεωρούμε δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n_1 και n_2 επιλεγμένα από δύο κανονικά κατανεμημένους πληθυσμούς με μέσες τιμές μ_1 και μ_2 και διασπορές σ_1^2 και σ_2^2, αντίστοιχα.

Αν $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, μια εκτιμήτρια της (άγνωστης) κοινής διασποράς σ^2 είναι:

$$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

Η τυχαία μεταβλητή

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

Ένα (1-α)100% διάστημα εμπιστοσύνης είναι:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{n_1+n_2-2;a/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{n_1+n_2-2;a/2} s_p \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

Έλεγχος υπόθεσης για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών (*t*)

μικρά δείγματα (n_1, n_2 <30), σ_1^2 , σ_2^2 άγνωστες αλλά ίσες

Τιμή του στατιστικού: $t = \dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{s_p\sqrt{(1/n_1)+(1/n_2)}}$, $s_p^2 = \dfrac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

Περιοχές Απόρριψης της H_0

Μονόπλευρο test	Δίπλευρο test
$t > t_{n_1+n_2-2;a}$ (H_1: μ_1-μ_2 >δ) $t < -t_{n_1+n_2-2;a}$ (H_1: μ_1-μ_2 <δ)	$\lvert t \rvert > t_{n_1+n_2-2;a/2}$

t_test2.xls

Δύο ανεξάρτητα δείγματα με διαφορετική παραλλακτικότητα

Εάν $s_1 \neq s_2$

Για τον έλεγχο της σημαντικότητας χρησιμοποιούμε το t_{crit} με $\hat{v}$ βαθμούς ελευθερίας

$$t = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{s_1^{\ 2}}{n_1} + \frac{s_2^{\ 2}}{n_2}}}$$

$$\hat{v} = \frac{(s_1^{\ 2}/n_1 + s_2^{\ 2}/n_2)^2}{[(s_1^{\ 2}/n_1)^2/(n_1 - 1)] + [(s_2^{\ 2}/n_2)^2/(n_2 - 1)]}$$

Δύο ανεξάρτητα δείγματα με διαφορετική παραλλακτικότητα

Αν $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Ένα (1-α)100% διάστημα εμπιστοσύνης είναι:

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - t_{v;a/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + t_{v;a/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

όπου οι βαθμοί ελευθερίας ν δίνονται από τη σχέση

$$v = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{[(s_1^2/n_1)^2/(n_1 - 1)] + [(s_2^2/n_2)^2/(n_2 - 1)]}$$

(η τιμή ν στρογγυλεύεται στον πλησιέστερο ακέραιο)

t_test3.xls

Έλεγχος υπόθεσης για τη διασπορά ενός πληθυσμού

Μηδενική υπόθεση $H_0 : \sigma^2=\sigma_0^2$

Εναλλακτική υπόθεση:

Μονόπλευρο test	Δίπλευρο test
$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ ή $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$	$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

Τιμή του στατιστικού: $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$

Περιοχές Απόρριψης της H_0

Μονόπλευρο test	Δίπλευρο test
$\chi^2 > \chi^2_{n-1;\alpha}$ $(H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2)$ $\chi^2 < \chi^2_{n-1;1-\alpha}$ $(H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2)$	$\chi^2 > \chi^2_{n-1;\alpha/2}$ ή $\chi^2 < \chi^2_{n-1;1-\alpha/2}$

Έλεγχος υπόθεσης για το λόγο των διασπορών δύο πληθυσμών

F-test

Μηδενική υπόθεση $H_0 : \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$ ή $\sigma_1^2=\sigma_2^2$

Εναλλακτική υπόθεση:

Μονόπλευρο test	Δίπλευρο test
$H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$ ή $H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1$	$H_1: \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$

Τιμή του στατιστικού: $f = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$

Περιοχές Απόρριψης της H_0

Μονόπλευρο test	Δίπλευρο test
$f > f_{n_1-1,n_2-1;\alpha}$ $(H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2)$ $f < f_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha}$ $(H_1: \sigma_1^2 < \sigma_2^2)$	$f > f_{n_1-1,n_2-1;\alpha/2}$ ή $f < f_{n_1-1,n_2-1;1-\alpha/2}$

Ε. Κατσανίδης

Δύο εξαρτημένα δείγματα με τιμές κατά ζεύγη

- Δεδομένα από 16 άτομα που εφάρμοσαν συγκεκριμένη δίαιτα.
  - Αρχείο Excel: Paired_t_test.xls

- Ερώτηση 1: ελαττώθηκαν τα τριγλυκερίδια;
- Ερώτηση 2: έχασαν βάρος με τη δίαιτα;
- Ερώτηση 3: έχασαν 3 Kg;
- Ερώτηση 4: έχασαν 4 Kg;

Έλεγχος υπόθεσης για τη διαφορά των μέσων τιμών δύο πληθυσμών

Δείγματα εξαρτημένα - Ζευγαρωτές παρατηρήσεις

$(n \leq 30)$

$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ είναι οι παρατηρήσεις του πρώτου δείγματος

$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}$ οι παρατηρήσεις του δευτέρου δείγματος

$d_i = x_{1i} - x_{2i}$ $i=1,2,\ldots,n$

Μηδενική υπόθεση $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$

Εναλλακτική υπόθεση:

Μονόπλευρο test	Δίπλευρο test
$H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta$ ή $H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$

Τιμή του στατιστικού:

$$t = \frac{\bar{d} - \delta}{s_d / \sqrt{n}}, \quad \bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i, \quad s_d^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2$$

Περιοχές Απόρριψης της H_0

Μονόπλευρο test	Δίπλευρο test
$t > t_{n-1;\alpha}$ $(H_1: \mu_1 - \mu_2 > \delta)$ $t < -t_{n-1;\alpha}$ $(H_1: \mu_1 - \mu_2 < \delta)$	$\lvert t \rvert > t_{n-1;\alpha/2}$